

Examen de Mathématiques et Physique en Interaction

Durée : 1 heure 30 minutes

Tous les documents sont interdits. Le matériel électronique est interdit, à l'exception d'une montre à affichage digital. Merci d'éteindre et de ranger dans vos sacs vos téléphones et autres objets connectés.

On s'intéresse à la modélisation de la propagation d'une épidémie qui décime les grenouilles de l'Yvette. Ce problème est constitué de deux parties complémentaires et indépendantes (à l'exception de la question II.5). Il faut traiter les deux parties.

Dans la **Partie I**, on étudie un modèle continu (à l'échelle d'une population), déterministe, qui modélise une flambée épidémique où une proportion non-négligeable de la population est infectée.

Dans la **Partie II**, on étudie un modèle discret (à l'échelle des individus), probabiliste, qui modélise le début possible d'une épidémie.

Les questions ne sont pas classées par ordre de difficulté croissante ; vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter la suite du sujet.

Partie I

On introduit le modèle SIR de propagation d'une épidémie. Dans ce modèle, les individus sont soit susceptibles (S), soit infectieux (I) soit écartés (R). Les proportions relatives des individus susceptibles, infectés, écartés à un instant $t \in \mathbb{R}$ sont notées respectivement $s(t) \in [0, 1]$, $i(t) \in [0, 1]$, $r(t) \in [0, 1]$, et on a en permanence $s(t) + i(t) + r(t) = 1$.

Dans ce modèle, les individus susceptibles sont infectés à une vitesse qui dépend à la fois des proportions d'individus susceptibles et infectieux (si personne n'est infectieux, ou si personne n'est susceptible, alors l'épidémie ne peut pas progresser). Par ailleurs l'infection dure un certain temps, et les individus infectés deviennent progressivement écartés (par guérison ou par mort). On obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -R_0 i s \\ \frac{di}{dt} = R_0 i s - i \\ \frac{dr}{dt} = i, \end{cases} \quad (\text{SIR})$$

où R_0 , le *taux de reproduction*, est une constante. On supposera toujours $R_0 > 1$. La configuration initiale est un triplet quelconque (s_0, i_0, r_0) de réels positifs tels que $s_0 + i_0 + r_0 = 1$.

Question I.1: Montrer que les seuls points d'équilibre de cette dynamique sont les configurations où aucun individu n'est infecté : $\{(s, 0, 1 - s), s \in [0, 1]\}$.

On cherche à étudier la stabilité de ces points d'équilibre.

Question I.2: Montrer que, en plus de $s(t) + i(t) + r(t)$, il y a une autre quantité conservée par l'équation différentielle (SIR):

$$H = R_0(i + s) - \ln(s).$$

On pourra utiliser à profit la formule

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{di} \frac{di}{dt} + \frac{dH}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Question I.3: On considère n'importe quelle trajectoire $s(t), i(t), r(t)$ vérifiant l'équation (SIR). Montrer que s est une fonction décroissante, et en déduire qu'elle converge quand $t \rightarrow +\infty$ et quand $t \rightarrow -\infty$. Montrer aussi que r est une fonction croissante, et en déduire qu'elle converge également. Montrer finalement que i converge.

Question I.4: Étudier la fonction

$$s \mapsto R_0 s - \ln(s)$$

sur l'intervalle $]0, 1]$. Montrer en particulier que les courbes $\{H = \text{constante}\}$ intersectent le lieu d'équilibre $\{i = 0\}$, soit en deux points, soit en un seul point.

Question I.5: Dans l'annexe (à rendre avec la copie) on a dessiné les courbes de niveau de la fonction H dans le plan (s, i) , le long desquelles le système évolue. Rajouter des flèches pour préciser dans quel sens évolue la dynamique, et préciser la valeur du point marqué. Colorier en rouge les points d'équilibre instables et en bleu les points d'équilibre stables.

Partie II

Si $i = 0$ et pour certaines valeurs de s , l'épidémie ne peut pas démarrer, d'après les résultats de la partie I. On se propose de conforter ces résultats à l'aide d'un modèle à l'échelle des individus.

Dans les premières phases d'une tentative de flambée épidémique, seul un nombre restreint d'individus (donc négligeable par rapport à la taille de la population) est infecté. Dans ce régime, les individus susceptibles forment un "réservoir" infini.

Une modélisation raisonnable pour la propagation épidémique est alors le modèle probabiliste à temps discret suivant.

Au temps initial, une seule grenouille est malade. À chaque temps $n \in \mathbb{N}$, chaque individu malade au temps $n-1$ a guéri, mais entre temps il a infecté un nombre aléatoire d'autres grenouilles. On se donne des probabilités

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

dont la somme fait $p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1$. Alors, indépendamment les uns des autres, on suppose que chaque individu malade a contaminé k autres grenouilles avec probabilité p_k . Si à un moment donné plus aucune grenouille n'est infectée, alors l'épidémie s'est éteinte.

Le nombre moyen de grenouilles infectées par individu malade et par unité de temps est noté

$$R = 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + \dots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $q_k(n)$ la probabilité que k individus soit infectés au temps n . On a donc $q_1(0) = 1$ et $q_k(0) = 0$ pour tout $k \neq 1$. Le nombre moyen de grenouilles infectées au temps n est noté

$$I_n = 1 \times q_1(n) + 2 \times q_2(n) + 3 \times q_3(n) + \dots$$

Question II.1 Puisqu'en moyenne, une grenouille infectée au temps n résulte en R grenouilles infectées au temps $n+1$, quelle est l'équation de récurrence vérifiée par I_n ? (Un raisonnement heuristique suffira, points bonus pour une démonstration rigoureuse).

Question II.2 On suppose $R < 1$. Montrer que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Question II.3 Montrer l'inégalité de Markov

$$q_0(n) \geq 1 - I_n.$$

Déduire des questions précédentes que, si $R < 1$, alors quand $n \rightarrow +\infty$, la probabilité que l'épidémie se soit éteinte tend vers 1.

Question II.4 On suppose que $R > 1$. Comment qualifier la vitesse de propagation (en moyenne) de l'épidémie ?

Question II.5 Comparer les résultats de la question précédente avec le comportement asymptotique de la proportion d'infectés dans le modèle (SIR) quand $t \rightarrow -\infty$ (Indice : justifier le remplacement de s par une constante). Quel est le lien entre R et R_0 ?

Annexe : Courbes de niveau pour $H=R0(i+s)-\ln(s)$, avec $R0=7$

Nom :

Prénom :

