

Examen de Mathématiques et Physique en Interaction

Durée : 1 heure 30 minutes

Tous les documents sont interdits. Le matériel électronique est interdit, à l'exception d'une montre à affichage digital et d'une calculatrice en mode "examen" (qui clignote). Merci d'éteindre et de ranger dans vos sacs vos téléphones et autres objets connectés.

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants. Il faut traiter les deux exercices.

Dans l'**Exercice I**, on étudie un jeu de plateau aléatoire et, par analogie, l'évolution d'une suite de polygones dans le plan selon une certaine transformation.

Dans l'**Exercice II**, on étudie le système du pendule soumis à l'application d'une force extérieure périodique.

Les questions ne sont pas classées par ordre de difficulté croissante ; vous êtes libres d'admettre le résultat d'une question pour traiter la suite du sujet. Les questions les plus difficiles sont indiquées par une (*).

Exercice I

On étudie le jeu de plateau très simple suivant : un pion se déplace sur une piste circulaire contenant N cases. À chaque tour, on lance une pièce. Si la pièce retombe sur pile (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$), on avance le pion d'une case. Si la pièce retombe sur face (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$), on ne fait rien.

Par commodité, on numérote les cases de 1 à N dans le sens de l'avancée du pion.

Question II.1 : Décrire ce processus comme une chaîne de Markov, dont on dessinera le graphe de transition. Combien a-t-elle d'états ?

Question II.2 : Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible et apériodique. Que peut-on dire sur le comportement en temps long ?

Question II.3 : Montrer que la loi de probabilité d'équilibre $(p_1, \dots, p_N)$ (où p_j est la probabilité qu'au bout d'un temps très grand le pion soit sur la case j) vérifie

$$p_j = \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \text{ si } 2 \leq j \leq N \qquad p_1 = \frac{p_N + p_1}{2}.$$

En déduire que $p_j = \frac{1}{N}$.

Question II.4 : On considère maintenant un polygone à N côtés dans le plan. Ses sommets sont repérés par N nombres complexes $z_1, \dots, z_N$: le sommet numéro i est au point d'affixe z_i , c'est-à-dire au point de coordonnées cartésiennes $(\operatorname{Re}(z_i), \operatorname{Im}(z_i))$. On trace alors les milieux des N côtés du polygone, puis on relie ces points pour former un nouveau polygone, dont les affixes des sommets sont $z'_1, \dots, z'_N$.

Montrer que

$$z'_j = \frac{z_j + z_{j-1}}{2} \text{ si } 2 \leq j \leq N \qquad z'_1 = \frac{z_N + z_1}{2}.$$

Commenter sur la similarité et les différences avec le fait de calculer les probabilités $(p'_1, \dots, p'_N)$ d'être sur une certaine case à un moment, en fonction des probabilités $(p_1, \dots, p_N)$ au tour précédent.

Question II.5 : On appelle barycentre du polygone la quantité

$$b(z_1, \dots, z_N) := \frac{1}{N}(z_1 + z_2 + \dots + z_N).$$

Montrer que $b(z'_1, \dots, z'_N) = b(z_1, \dots, z_N)$.

Question II.6 : On part de n'importe quel polygone à N sommets et à chaque "tour", on remplace le polygone qu'on voit par le polygone formé par les milieux des segments. A votre avis, que se passe-t-il quand on répète cette opération un très grand nombre de fois ? Justifiez votre réponse.

Question II.7 (*) : On suppose que $(z_1, \dots, z_N)$ forme un polygone convexe (pour toute paire de points x et y contenus dans le polygone, le segment reliant x à y est lui-même contenu dans le polygone). On suppose en plus qu'il n'est pas réduit à un point. Montrer que le diamètre du polygone $(z'_1, \dots, z'_N)$ est strictement inférieur à celui du polygone $(z_1, \dots, z_N)$.

Exercice II

Le mouvement d'un pendule soumis à la gravité et aux frottements de l'air tend à converger vers le point d'équilibre stable où le pendule est à la verticale. Pour faire de la balançoire, on compense les frottements par l'application d'une force externe périodique. On modélise l'évolution de l'angle orienté θ du pendule avec la verticale par l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} = -\sin(\theta) - \gamma\dot{\theta} + A\cos(\omega t). \quad (1)$$

On sera amené à linéariser cette équation différentielle, et le modèle devient l'oscillateur harmonique amorti entretenu

$$\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x} + A\cos(\omega t). \quad (2)$$

Question II.1 : Expliquer chaque terme de l'équation (1). Dans quel régime, et pourquoi, l'équation (2) en est une bonne approximation ?

Question II.2 : On étudie le système (2). On suppose que $\gamma \in]0, 2[$ et on pose

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Montrer que

$$C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t)$$

est solution de l'équation homogène $\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x}$.

Question II.3 : On pose

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$
$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{(\omega^2 - 1)}{\gamma\omega}\right),$$

et on admet que les solutions de (2) sont de la forme

$$C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t) + AM(\omega) \sin(\omega t - \phi(\omega)). \quad (3)$$

En déduire que pour n'importe quel ω , en temps long, $x(t)$ oscille avec une période $2\pi/\omega$.

Question II.4 : L'amplification $M(\omega)$ décrit le rapport entre l'amplitude de la force exercée et l'amplitude du mouvement obtenu. Tracer l'allure de $M(\omega)$ en fonction de ω , pour γ petit. Vers quelle valeur $M(\omega)$ est-il grand ? Commenter.

Question II.5 : On a tracé au verso quelques courbes, dans l'espace des phases (position θ en abscisse et vitesse $\dot{\theta}$ en ordonnée), des solutions de l'équation (1), pour $\gamma = 0.5, \omega = 0.66$, et diverses valeurs de A . Commenter ces figures.

Question II.6 (*) : Vérifier que les solutions de (2) sont bien de la forme

$$C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t) + AM(\omega) \sin(\omega t - \phi(\omega)).$$

On supposera $\omega \geq 0$ et utilisera à profit les formules, valables pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\arctan(u)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad \sin(\arctan(u)) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

