

## Examen de Mathématiques et Physique en Interaction

Durée : 1 heure 30 minutes

*Tous les documents sont interdits. Le matériel électronique est interdit, à l'exception d'une montre à affichage digital et d'une calculatrice en mode "examen" (qui clignote). Merci d'éteindre et de ranger dans vos sacs vos téléphones et autres objets connectés.*

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants. Il faut traiter les deux exercices.

Dans l'**Exercice I**, on étudie une famille à un paramètre de systèmes dynamiques discrets. On cherche à mettre en évidence la présence de points fixes, leur stabilité, et l'émergence du chaos.

Dans l'**Exercice II**, on étudie un modèle typique mettant en jeu un phénomène de bifurcation.

Les questions ne sont pas classées par ordre de difficulté croissante ; vous êtes libres d'admettre le résultat d'une question pour traiter la suite du sujet.

## Exercice I

On étudie, dans tout cet exercice, les suites définies par récurrence de la forme

$$u_{n+1} = r \sin(x) \quad u_0 \in [0, \pi] \quad (1)$$

où  $r \in [0, \pi]$ .

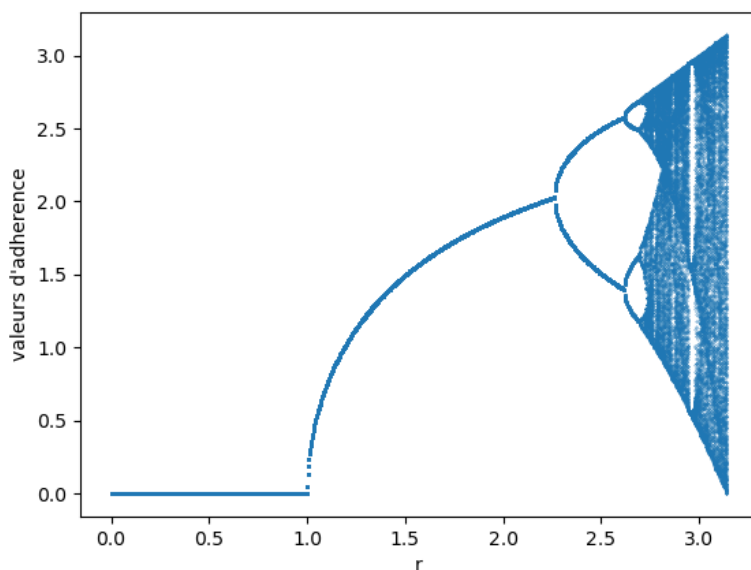
**Question I.1 :** Montrer soigneusement que les solutions de (1) sont des suites à valeurs dans  $[0, \pi]$ . Si  $r \leq 1$ , montrer que ces suites tendent vers 0 (on pourra montrer que  $\sin(x) \leq x$  quand  $x \geq 0$  et examiner le cas d'égalité).

**Question I.2 :** On suppose dans toute la suite de cette exercice que  $r > 1$ . Montrer qu'il existe exactement deux valeurs de  $u_0$  telles que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante. On note  $x_0(r)$  la plus grande de ces deux valeurs ; montrer que  $r \cos(x_0(r)) < 1$  (on ne cherchera pas à calculer  $x_0(r)$  mais on pourra d'abord raisonner graphiquement).

**Question I.3 :** Dans cette question on suppose que  $r \cos(x_0(r)) > -1$ . Montrer qu'il existe  $\rho < 0$  et  $\epsilon > 0$  tel que, pour tout  $y \in [x_0(r) - \epsilon, x_0(r) + \epsilon]$ , on a  $|r \cos(x_0(r))| \leq \rho$ . En déduire, par récurrence sur  $n$ , le fait suivant: si  $u_0 \in [x_0(r) - \epsilon, x_0(r) + \epsilon]$ , alors  $u_n \in [x_0(r) - \epsilon\rho^n, x_0(r) + \epsilon\rho^n]$ . Quel est alors le comportement de la suite  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ? Il est suggéré d'utiliser le vocabulaire du cours.

**Question I.4 :** Dans cette question on suppose  $r \leq \frac{\pi}{2}$ . Montrer que  $x_0(r) \leq \frac{\pi}{2}$  puis que  $r \cos(x_0(r)) \geq 0$ . Peut-on appliquer le résultat de la question I.3 ? Montrer en fait que pour tout  $u_0 \in ]0, x_0(r)]$ , la suite  $u_n$  est croissante et converge vers  $x_0(r)$ , et que pour tout  $u_0 \in [x_0(r), \pi - x_0(r)]$ , la suite  $u_n$  est décroissante et converge vers  $x_0(r)$ . Que se passe-t-il si  $u_0 \in [\pi - x_0(r), \pi]$ ?

**Question I.5 :** On a représenté ci-dessous les valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour différentes valeurs de  $r$ . Commenter la figure.



## Exercice II

On étudie, dans les premières questions de cet exercice, un pendule simple placé dans un référentiel en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$  constante, autour de l'axe vertical d'équilibre du pendule. On est amené à l'équation différentielle suivante sur l'angle  $\theta$  que fait le pendule avec la verticale:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) + 2\Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (2)$$

où  $g$  (homogène à une accélération) est l'intensité de la pesanteur et  $L$  est la longueur du pendule.

**Question I.1 :** Écrire cette équation sous la forme  $\ddot{\theta} = -V'(\theta)$ . Justifier l'origine des différents termes dans l'énergie potentielle  $V$ , et notamment l'homogénéité.

**Question I.2 :** Étudier et représenter graphiquement la fonction  $V$ ; on procèdera par disjonction de cas en fonction de la valeur de  $\Omega$ .

**Question I.3 :** Réaliser un *diagramme de bifurcation*: dans un plan dont  $\Omega$  est l'abscisse et  $\theta$  est l'ordonnée, représenter les différents points d'équilibre en fonction de  $\Omega$ , et leur stabilité. Représenter également (à part) les trajectoires typiques de (2). On n'oubliera pas de justifier.

**Question I.4 :** Comparer le comportement de ce système avec celui de la suite logistique  $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$  autour de la valeur  $r = 3$ . On n'oubliera pas non plus de justifier le comportement de la suite logistique autour de cette valeur.

**Question I.5 :** Pour Noël, Snoopy a reçu un beau cadeau de la part de Linus: une balle qui émet un couinement lorsqu'on appuie dessus. L'intérieur de la balle est un réceptacle d'air, relié à l'extérieur par un conduit dans lequel se trouve une lamelle de métal (ou anche). Au passage de l'air, les turbulences mettent l'anche en vibration, produisant le bruit caractéristique. Snoopy a observé qu'en appuyant précautionneusement sur la balle, l'air sort très progressivement et aucun son n'est émis.

Expliquer le phénomène.