

DM 1. Correction.

1) Par récurrence : $u_n = x^n \quad \forall n \geq 0$.

Si $x = 0$, $u_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

Si $x > 0$, $x \in [0, 1[$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$x = 1$, $u_n = x \quad \forall n \geq 0$

$x > 1$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

2) $f(0) = f(1) = 0$.

$$f(x) = rx(1-x) = r\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leq \frac{r}{4} \leq 1 \quad \text{si } r \in [0, 4].$$

$$f'(x) = r(1-2x)$$

donc $f'(0) = r > 0$ et $f'(1) = -r < 0$
et par continuité $f'(x) > 0$ pour x proche de 0

$$f'(x) < 0 \quad \text{pour } x \text{ proche de } 1.$$

3) $u_n \rightarrow l$ donc $1-u_n \rightarrow 1-l$ et par produit de suites convergentes $f(u_n) = ru_n(1-u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} rl(1-l) = f(l)$.

4) L'équation $f(x) = x$ a deux solutions

$$x = 0 \quad \text{et } x = \bar{x} = 1 - \frac{1}{r}.$$

$$\text{Donc } f(x) - x = -rx(x - \bar{x})$$

Si $x \in [0, 1]$ alors $\bar{x} \leq 0$ et $f(x) - x \leq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

Montrons par récurrence que $u_n \in [0, 1], \forall n \geq 0$.

On a $u_0 = x \in [0, 1]$ (initialisation).

Si $u_n \in [0, 1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$
par 2) donc cela prouve l'hérédité.

Maintenant, on a: $u_{n+1} = \underbrace{f(u_n)}_{\in [0, 1]} \leq u_n \quad \forall n \geq 0$

donc $(u_n)_{n \geq 0}$ décroît.

2. $(u_n)_{n \geq 0}$ décroît et $u_n \geq 0$ par 1. donc

$(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

3. Par 3), $u_{n+1} = f(u_n)$
 $\downarrow \quad \downarrow n \rightarrow +\infty$
 $l = f(l)$

Donc $l = 0$ ou $l = 1 - \frac{1}{\lambda} \leq 0$. Comme $u_n \geq 0$,
la seule limite possible est $l = 0$.

5) $f(x) = x$ a deux solutions $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{\lambda}$
 ≥ 0

Si $\lambda \geq 1$.

6) Soit $n \geq 0$. Alors $u_n = \underbrace{f(u_{n-1})}_{\in [0, 1]} < 1$

Si $\lambda \in [1, 4]$ par 2).

2. Par récurrence: $P(n)$: " $u_n = 0 \Rightarrow u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ ".

$P(0)$ est évident. Supposons $P(n)$ vraie.

Si $u_{n+1} = 0$ alors $f(u_n) = 0$ donc $u_n = 0$ ou $u_n = 1$. Si $n \geq 1$, c'est impossible par 6) 1. donc $u_n = 0$ et alors $u_0 = 0$ ou 1 par $P(n)$. Si $n = 0$, alors $u_0 = 0$ ou 1 donc c'est vrai aussi.

3. Comme $f(x) = -x(x - \bar{x})$, on a $f(x) > x$ pour tout $x \in]0, \bar{x}[$. Si $u_n \rightarrow 0$, alors il existe $n_0 \geq 0$ t.q. $\forall n \geq n_0, u_n \in]0, \bar{x}[$.
Donc : soit $u_n = 0$ à partir d'un certain rang et alors $u_0 = 0$ ou 1 par 2).

• Soit $u_n > 0$ et alors $u_{n+1} = f(u_n) > u_n > 0$
 $\forall n \geq n_0$ $\forall n \geq n_0$

La suite étant minorée par $u_{n_0} > 0$, elle ne peut converger vers 0.

7) 1. $\bar{x} = 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ si $n \in]1, 2]$.

2. f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc $[0, \bar{x}]$. Alors

$$x < f(x) \leq f(\bar{x}) = \bar{x}$$

par 6) 3. $\nearrow$

3. Si $x > \bar{x}$, $f(x) - x = -kx(x - \bar{x}) \leq 0$

f est croissante sur $[\bar{x}, \frac{1}{2})$ et décroissante sur $(\frac{1}{2}, 1 - \bar{x})$ et $f(\bar{x}) = f(1 - \bar{x}) = \bar{x}$ donc $f(x) > \bar{x}$.

4. f est décroissante sur $[1 - \bar{x}, 1[$ donc $0 \leq f(x) \leq f(1 - \bar{x}) = \bar{x}$.

5. • Si $u_0 \in]0, \bar{x}]$ alors par récurrence on a immédiatement que $u_n \in]0, \bar{x}] \quad \forall n \geq 0$
(en effet, vrai pour u_0 et si $u_n \in]0, \bar{x}]$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in]0, \bar{x}]$ par 2.)

Alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n \geq u_0 > 0$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ croissante majorée, $u_n \rightarrow l$ qui vérifie $f(l) = l$ donc $l = \bar{x}$ car (u_n) est minorée par $u_0 > 0$.

• Si $u_0 \in [\bar{x}, 1 - \bar{x})$ alors $u_n \in [\bar{x}, 1 - \bar{x}) \quad \forall n \geq 0$

et comme avant, on montre que $u_{n+1} \leq u_n$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ décroît et est minorée, elle converge vers l tq $f(l) = l$ donc $l = \bar{x}$.

• Si $u_0 \in [1 - \bar{x}, 1[$ alors $u_1 = f(u_0) \in]0, \bar{x})$ et on applique le 1^{er} cas.

$$8) 1. f'(0) = \lambda > 1 \text{ si } \lambda > 1$$

$$f'(\pi) = 2 - \lambda \in (0, 1) \text{ si } \lambda \in]1, 2[.$$

$$2. f'(0) = \lambda < 1 \text{ si } \lambda < 1.$$

$$9) \text{ on suppose } y_- = y - \delta, y_+ = y + \delta.$$

$$1. \text{ Il existe } c \in [x, y] \subset [y_-, y_+] \text{ tq'}$$

$$f(x) - f(y) = f(x) - y = f'(c)(x - y).$$

$$\text{Donc : } |f(x) - y| = |f'(c)| |x - y| \leq a |x - y|.$$

$$2. \text{ Si } u_n \in [y_-, y_+] \text{ alors}$$

$$|u_{n+1} - y| \leq a |u_n - y| < |u_n - y| < \delta$$

donc $u_{n+1} \in [y_-, y_+]$. Par récurrence, cela établit que $u_n \in [y_-, y_+] \forall n \geq 0$. Alors :

$$|u_{n+1} - y| \leq a |u_n - y| \leq a^2 |u_{n-1} - y| \leq \dots \leq a^n |u_0 - y|.$$

(à établir par récurrence). Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$

géométriquement.

$$10) |f'(\bar{x})| = |2 - \lambda| < 1 \text{ si } \lambda \in]1, 3[$$

$$\text{ou } > 1 \text{ si } \lambda > 3.$$

On observe convergence exponentielle vers $\bar{x}$

$$\text{si } \lambda \in]1, 3[.$$

11) 1. Suite "periodique" de periode 2.

2. On regarde $a_n = u_{2n}$
 $b_n = u_{2n+1}$

Alors $a_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$.

Les valeurs limites doivent verifier $f(f(x)) = x$.

Soit $x^2 x(1-x)(1-x(1-x)) = x$.

Une solution est $x = 0$. On se ramene à

$$P(x) = x^2(1-x)(1-x(1-x)) - 1 = 0$$

$$= x^2 - 1 - x^2(\lambda+1)x + 2\lambda^3 x^2 - \lambda^3 x^3$$

$$= -\lambda^3(x - \bar{x})(x^2 + bx + c)$$

On trouve par identification :

$$b = -(1 + \frac{1}{\lambda}) \quad c = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}$$

Les deux autres racines sont donc :

$$x_{\pm} = \frac{1 + \frac{1}{\lambda} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\lambda+1 \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}$$

$$\Delta = (1 + \frac{1}{\lambda})^2 - 4 \frac{\lambda+1}{\lambda^2}$$

8. Jusqu'à $\lambda \approx 3,43$.

12) 1. Ensuite jusqu'à $\lambda \in [3,43, 3,54)$, on voit une période 4, puis 8 pour $\lambda \in [3,54, 3,575 \dots)$.

2. Cela devient chaotique.

3. Autour de 3,83 par exemple, on observe une périodicité de 3.