

Séance à distance 1

La suite logistique

Instructions de dépôt du DM

Vous devez me rendre, pour ce DM et pour les suivants :

- Une copie (papier ou numérisée) par groupe
- Un fichier .ipynb, Notebook Jupyter rempli sur la base du Notebook consigne, par groupe.

Le Notebook consigne se trouve sur ma page web à l'adresse

<https://thibaultlefeuvre.blog/mathematics-enseignement/>

Vous devez m'envoyer par mail (thibault.lefeuvre1@universite-paris-saclay.fr, veillez à bien mettre le 1 !) le Notebook rempli et votre copie numérisée, sauf si vous me la rendez en personne, jusqu'à la veille du jour où on a cours, à 23h59. Passé ce délai, je n'accepte plus les Notebooks.

Le Notebook que vous m'envoyez doit être nommé selon le format DMx_NOM1_NOM2.ipynb. Par exemple, si Sofia Kovalevskaja et Maryam Mirzakhani ont travaillé ensemble sur le DM1, l'une d'entre elle dépose un fichier nommé DM1_KOVALEVSKAIA_MIRZAKHANI.ipynb

Si vous ne respectez pas cette consigne de nom de fichier, je ne pourrai pas associer le fichier au groupe correspondant et ce Notebook ne sera pas corrigé. Si vous m'envoyez votre copie numérisée, le fichier doit être nommé, selon la même convention, DMx_NOM1_NOM2.pdf

1 Introduction

L'objet de cette séance est l'étude d'une suite définie par récurrence, de la forme

$$\begin{cases} u_0 &= x \geq 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \geq 0 \quad (1)$$

pour certaines valeurs initiales $x \in \mathbb{R}$ et certaines fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On souhaite modéliser l'évolution, en fonction du temps, de la quantité d'individus dans une certaine population – par exemple, la quantité de grenouilles dans l'Yvette. Si $u = 0$, il n'y a aucune grenouille.

Pour simplifier, on considère l'évolution temporelle de u , non pas comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, mais comme une suite de valeurs à des instants régulièrement espacés, d'un temps qui correspond à un cycle de vie des grenouilles. Les grenouilles de l'Yvette n'ont pas de prédateur naturel, donc la quantité de grenouilles au temps $n+1$ ne dépend que de la quantité de grenouilles au temps n (et pas, par exemple, de la quantité d'individus d'une autre population). On obtient donc une suite définie par récurrence: $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une certaine fonction f .

Si à un instant donné il n'y a plus de grenouilles, $u_n = 0$, alors il n'y en aura pas non plus au temps suivant, donc $f(0) = 0$. Un modèle très simple est alors:

$$f : x \mapsto rx \quad (2)$$

pour un certain $r \geq 0$.

Question 1. Étudier la suite définie par récurrence par l'équation (1) quand f est de la forme (2). On pourra distinguer plusieurs comportements en fonction de la valeur de r .

Le comportement exhibé dans la question 1, lorsque $r > 1$, est peu réaliste : la population de grenouilles ne peut pas croître indéfiniment. Pour cela, on ajoute une autre contrainte: si à un instant donné l'Yvette est remplie de grenouilles, $u_n = 1$, alors elles sont trop nombreuses pour se partager la nourriture, et aucune ne peut se reproduire, donc $f(1) = 0$.

Remarquons que, dans cette modélisation, u ne représente pas un nombre (entier) de grenouilles, mais la proportion de grenouilles: $u = 1$ correspond à la quantité maximale de grenouilles qui puisse vivre dans l'Yvette.

Plus généralement, la fonction f doit être croissante si u est petit, et décroissante si u est grand: s'il y a peu de grenouilles, alors il y a assez de ressources pour tout le monde de toute façon, et plus il y a de grenouilles plus elles se reproduisent ; s'il y a beaucoup de grenouilles, elles sont en compétition pour les ressources, et augmenter le nombre de grenouilles n'est pas favorable à leur survie.

Dans toute cette séance, on considèrera f de la forme suivante:

$$f : x \mapsto rx(1 - x), \quad (3)$$

pour un certain paramètre $r \in [0, 4]$.

Question 2. Montrer que, pour tout $r \in [0, 4]$, la fonction f modélise correctement le problème:

- $f(0) = f(1) = 0$
- pour tout $u \in [0, 1]$, $f(u) \in [0, 1]$.
- f est croissante près de zéro et décroissante près de 1.

Cette activité est aussi illustrée numériquement : dans le fichier Suite_Logistique.ipynb vous trouverez un code (déjà écrit) qui permet de visualiser la suite u_n . Vous pouvez notamment appeler la fonction `logistique()` qui s'utilise comme suit: `logistique(r,N,u0)` trace les N premières valeurs de la suite, avec paramètre r et valeur initiale u_0 . Le paramètre u_0 est optionnel: un appel à `logistique(r,N)` trace les N premières valeurs de la suite avec paramètre r , en choisissant u_0 uniformément au hasard entre 0 et 1.

La fonction (informatique) `logistique()` marche comme une fonction mathématique: elle a une entrée (deux paramètres qui sont des nombres, plus un paramètre optionnel qui est aussi un nombre), et une sortie (un graphique). Dans d'autres TP, vous croiserez d'autres fonctions que vous devrez appeler, et je préciserai le type des paramètres d'entrée, le type de la sortie, et le comportement attendu de la fonction.

Dans toutes les questions pour lesquelles c'est pertinent, et même si je ne le demande pas explicitement, vous devez illustrer vos résultats grâce à ce notebook, en indiquant précisément dans vos réponses quelle(s) figure(s) du notebook il faut regarder, et en commentant les figures dans ce notebook grâce à des blocs "Markdown".

On s'intéresse aux propriétés de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction du paramètre r ; la propriété élémentaire suivante sera utile.

Question 3. Montrer que la fonction f de l'équation (3) est *séquentiellement continue*: pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$, alors la suite $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

(On pourra utiliser les propriétés de l'addition et la multiplication des suites convergentes.)

2 Extinction

Pour commencer, on va montrer que, si $r \in [0, 1]$, alors quelle que soit la valeur initiale x de la population, les grenouilles disparaissent.

Question 4. On suppose que $r \in [0, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \leq x$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$. Montrer que $f(\ell) = \ell$, et en déduire que $\ell = 0$.

Non seulement 0 est un *point d'équilibre* de la dynamique de population des grenouilles (si $u_n = 0$, alors $u = 0$ pour tous les temps supérieurs à n , autrement dit, $f(0) = 0$), mais cet équilibre est *stable* si $r \in [0, 1]$: pour une valeur de u_0 différente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va être “attirée” par 0.

À partir de maintenant, on suppose $r > 1$.

Question 5. Montrer que f possède deux points d'équilibre.

Il est naturel de se demander, pour chacun de ces points d'équilibre, s'il est stable ; c'est l'objet des questions suivantes.

Question 6. On suppose que $r \in]1, 4[$.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$, il n'est pas possible que $u_n = 1$.
2. En déduire que, si $u_n = 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$.
3. Montrer que c'est le seul cas de figure pour lequel $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. (On pourra identifier un intervalle de la forme $]0, \gamma[$ tel que, si $x \in]0, \gamma[$, alors $f(x) > x$, observer que si $u_n \rightarrow 0$ alors toutes les valeurs de u_n sont dans cet intervalle pour n assez grand, et conclure par l'absurde).

Si $r \in]1, 4[$, les grenouilles sont donc sauvées: à moins que $u_0 = 0$ ou 1, la population de grenouilles ne peut pas tendre vers 0. À ce stade, il est donc naturel de se demander si l'autre point d'équilibre de f est la limite de la suite (u_n) .

3 Comportement stable ou instable

Question 7. On suppose que $r \in]1, 2]$. On appelle $\bar{x}$ la solution de $f(x) = x$ qui est différente de zéro.

1. Montrer que $\bar{x} < \frac{1}{2}$.
2. Montrer que si $x \in]0, \bar{x}]$, alors $f(x) \in]x, \bar{x}]$.
3. Montrer que si $x \in [\bar{x}, 1 - \bar{x}]$, alors $f(x) \in [\bar{x}, x]$.
4. Montrer que si $x \in [1 - \bar{x}, 1[$, alors $f(x) \in]0, \bar{x}]$.
5. En utilisant les trois questions précédentes, montrer soigneusement que si $u_0 \in]0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \bar{x}$. On pourra raisonner par disjonction de cas, en traitant séparément $u_0 \in]0, \bar{x}]$, $u_0 \in [\bar{x}, 1 - \bar{x}]$ et $u_0 \in [1 - \bar{x}, 1[$, utiliser le fait qu'une suite monotone bornée converge, et examiner les différentes possibilités pour la limite.

Pour $r \in]1, 2]$, on a donc montré que f possède deux points d'équilibre, le point instable 0 et le point stable $\bar{x}$.

Question 8.

1. Montrer que, si $r \in]1, 2]$, on a $f'(0) > 1$ et $0 \leq f'(\bar{x}) < 1$.
2. Montrer que, si $r < 1$, on a $f'(0) < 1$.

La stabilité d'un point d'équilibre est liée à la taille de la dérivée de f en ce point; c'est vrai dans les exemples qu'on vient de voir, mais c'est aussi vrai en général.

Question 9. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction dérivable générale. Soit $y \in [0, 1]$ tel que $f(y) = y$ et $|f'(y)| < 1$. On admet qu'il existe $y^- < y < y^+$ et $0 < a < 1$ tels que, pour tout $x \in [y^-, y^+]$, on a $|f'(x)| < a$. On suppose que $u_0 \in [y^-, y^+]$.

1. Montrer que $|f(x) - y| \leq a|x - y|$. On pourra utiliser le résultat suivant: pour tout x , il existe c entre x et y tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$.
2. On pose $u_0 \in [y^-, y^+]$ puis par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $|u_n - y|$ décroît vers zéro au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison a . Conclure.

Un point d'équilibre y tel que $|f'(y)| < 1$ attire donc les suites dont les valeurs initiales sont proches de y . Réciproquement, on peut montrer que les points d'équilibres y tels que $|f'(y)| > 1$ "repoussent" les suites dont les valeurs initiales sont proches, comme dans la question 6.

Question 10. Montrer que, pour tout $r \in]1, 3[$, le point d'équilibre $\bar{x}$ vérifie $|f'(\bar{x})| < 1$, et que pour $r > 3$, on a $|f'(\bar{x})| > 1$.

Pour $r \in]1, 3]$, quel comportement de la suite u observez-vous dans le notebook ?

Si $r > 3$, alors les deux points d'équilibre 0 et $\bar{x}$ sont instables.

Question 11.

1. Pour r légèrement supérieur à 3, observer que la suite (u_n) "s'approche" d'une suite périodique de période 2.
2. Calculer les deux valeurs "limites" de u_n (on pourra résoudre $f(f(x)) = x$ en remarquant qu'on cherche les racines d'un polynôme de degré 4 dont on connaît déjà deux racines, 0 et $\bar{x}$).
3. Jusqu'à quelle valeur de r observez-vous une suite de période 2 ? Est-ce que les "valeurs limites" coïncident avec vos calculs ? (On pourra utiliser la fonction `np.sqrt()` pour calculer une racine carrée)

4 Exploration numérique pour r grand

Question 12.

1. Mettre en évidence numériquement un *dédoublément de période*: pour certaines valeurs de r (dans un intervalle à déterminer expérimentalement) on obtient, asymptotiquement, une suite de période 2. Puis pour des valeurs de r supérieures (même chose), on obtient une suite de période 4. Puis une suite de période 8, etc.
2. Que se passe-t-il après cette cascade de dédoubléments ?
3. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ pouvez-vous trouver une valeur de r telle que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'approche d'une suite de période m ? (Ces valeurs de r sont "cachées" au milieu de ce qui se passe après la cascade de dédoubléments).