

Séance 2

Stabilité des équations différentielles linéaires autonomes

1 Introduction

Dans cette séance, on étudie des équations différentielles, qui caractérisent l'évolution temporelle d'un système mécanique ou électrique. Le contexte est le suivant : un système physique décrit par une variable réelle y (position d'un bras de robot selon un axe, température,...) est initialement à la position y_i et on cherche à l'amener à une position finale y_f . Quitte à changer le repère, on suppose que $y_i = 1$ et $y_f = 0$. On a conçu un système (circuit électrique au sein d'un robot, thermostat, ...) qui tente de réaliser cette tâche, et on cherche à vérifier si c'est bien le cas, et éventuellement modifier les paramètres du système à cet effet.

De manière très générale, dans ce type de systèmes, l'évolution temporelle de la position se fait par une *équation différentielle*. Un exemple de telle évolution est le suivant : la position y est une fonction du temps t , solution de

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Dans cet exemple, il s'agit d'une équation différentielle linéaire autonome du premier ordre (chacun de ces termes sera expliqué plus tard), et plus précisément du *problème de Cauchy* associé à cette équation différentielle : étant donnée l'équation d'évolution $y'(t) = ay(t)$ et une condition initiale $y(0) = 1$, on cherche la ou les fonctions y qui vérifient cette équation.

Question 1. Montrer que la fonction $y_0 : t \mapsto e^{at}$ est solution du problème (1).

Question 2. Soit y une autre solution de (1). On pose $z = \frac{y}{y_0} - 1$.

Montrer que z est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = 0 \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

et en déduire que z est nulle sur $\mathbb{R}$. Conclure : y_0 est la seule solution de (1).

Question 3. Étudier le comportement de y_0 en temps positif. À quelle condition sur a le système a-t-il le comportement désiré ?

Par analogie avec le TD précédent, selon la valeur de a , le point 0 est stable ou instable pour l'équation différentielle $y' = ay$.

Dans des systèmes plus généraux, des dérivées supérieures peuvent intervenir. La forme générale d'un tel système est la suivante :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \dots + a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ici, la notation $y^{(k)}$ représente la dérivée k -ième de y : on a $y^{(1)} = y'$ et $y^{(k)} = [y^{(k-1)}]'$ pour tout k . Les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des réels quelconques.

On parle alors de problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire autonome d'ordre n . L'adjectif "autonome" signifie que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ne dépendent pas de t : les réglages du système sont fixés une fois pour toutes. L'adjectif "linéaire" renvoie à la propriété suivante :

Question 4. Soient y_1 et y_2 deux fonctions solutions de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \quad (3)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λy_1 et $y_1 + y_2$ sont solutions de cette même équation.

On peut donc multiplier une solution par une constante, ou (comme précédemment) ajouter ou soustraire des solutions pour obtenir de nouvelles solutions.

En plus de $y(0) = 1$ et de l'équation différentielle ci-dessus, les conditions sur les dérivées de y jusqu'à la $n - 1$ ème garantissent l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy (2), comme on le verra en partie plus tard.

À une équation différentielle linéaire autonome, on associe un polynôme qu'on appelle *symbole* de l'équation. Ce polynôme est défini par

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

où les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les mêmes que dans (2).

Par exemple, le symbole de l'équation du premier ordre dans (1) est simplement $X - a$. On va voir que les propriétés du symbole P sont liées au comportement de l'équation différentielle, et en particulier, qu'un critère sur P permet d'affirmer si les solutions tendent vers zéro en l'infini.

2 Systèmes du second ordre

Dans cette section, on s'intéresse au cas $n = 2$: on étudie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1y' + a_0y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

associé à l'équation différentielle linéaire autonome du second ordre

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (5)$$

où les coefficients a_1 et a_0 sont des nombres réels quelconques.

Question 5. Montrer qu'une fonction de la forme $y : t \mapsto e^{\lambda t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution de (5) si, et seulement si, $P(\lambda) = 0$.

Question 6. On suppose que le discriminant de P est strictement positif, et donc qu'il existe deux racines distinctes λ_1 et λ_2 de P . Montrer que toutes les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

sont solutions de (5), et qu'il existe un unique couple (C_1, C_2) telle que la fonction ci-dessus vérifie les conditions initiales.

Question 7. On suppose que le discriminant de P est strictement négatif. Montrer que toutes les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto C_1 e^{rt} \cos(\omega t) + C_2 e^{rt} \sin(\omega t)$$

sont solutions de (5), où on déterminera r et ω en fonction de P .

Question 8. À quelle condition sur λ_1 et λ_2 (si le discriminant est strictement négatif, à quelle condition sur r et ω) est-il vrai que les solutions de (5) tendent vers zéro en $+\infty$?

Question 9. (Nombres complexes)

Reformuler la condition précédente par une phrase qui commence par « Toutes les racines de P », et comparer avec le cas d'une équation de degré 1 étudié précédemment.

On s'intéresse à présent au comportement qualitatif de la solution du problème de Cauchy (4).

Question 10. On suppose que le système est stable et que le discriminant est strictement négatif. Montrer que la solution de (4) est de la forme

$$y : t \mapsto \left(\cos(\omega t) + \frac{r}{\omega} \sin(\omega t) \right) e^{-rt}.$$

Dessiner l'allure de la solution et décrire son comportement.

Question 11. On suppose que le système est stable et que le discriminant est strictement positif. Montrer que la solution du problème de Cauchy est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comparer avec le comportement précédent.

Question 12. Représenter, dans le plan (a_0, a_1) , les zones où le système est stable et celles où le système est instable.

3 Systèmes d'ordre supérieur – exploration numérique

On cherche à généraliser les critères de stabilité précédents à des systèmes généraux. On étudie une équation différentielle de la forme (3) et le problème de Cauchy (2) associé.

À ce TD est associé un Notebook Jupyter, `DE_solver.ipynb`, qui permet de simuler les problèmes de Cauchy pour une équation différentielle linéaire autonome.

Puisqu'on étudie des équations d'ordre arbitraire, si on veut utiliser Python, il faut être capable de passer comme argument à une fonction, non pas un nombre fixé de paramètres distincts, mais une liste de paramètres (ici, la liste $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$). En Python, on écrit une liste en mettant des crochets autour des valeurs, et comme d'habitude des virgules entre les valeurs. Par exemple `[5,3]` ou `[-2,6,17,40]` sont des listes. Une liste peut contenir un seul élément, comme `[6]`, et même ne contenir aucun élément : la liste vide s'écrit `[]`.

On peut penser à une liste comme un ensemble (la liste vide correspondant à l'ensemble vide), mais une liste est *ordonnée* : `[3,5]` n'est pas la même liste que `[5,3]`, et d'ailleurs on peut avoir plusieurs fois le même élément dans une liste : `[0,0,0,0,0,0]` est une liste. Le concept de liste est donc particulièrement adapté à notre contexte, où une équation différentielle linéaire autonome correspond à une liste, ordonnée, de nombres $[a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}]$.

Dans le fichier `DE_solver.ipynb`, on a écrit une fonction `solve_DE()` qui résout le problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire autonome. Cette fonction prend en entrée :

- Une liste de nombres de longueur arbitraire, correspondant aux valeurs des coefficients $[a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}]$.
- Un nombre positif, correspondant au temps maximal de la simulation.

Cette fonction admet un troisième argument optionnel : une liste (de même longueur que la première), qui est utilisée comme condition initiale. Le premier élément de cette liste sera $y(0)$, le second sera $y'(0)$, et ainsi de suite jusqu'à $y^{(n-1)}(0)$. Si ce troisième argument n'est pas renseigné, on utilise la liste `[1, 0, 0, ..., 0]`, qui correspond à (2).

Si la fonction s'exécute sans erreur, elle affiche un graphique de l'évolution temporelle approchée de l'équation, du temps zéro au temps précisé par le deuxième argument.

Question 13. Illustrer les questions précédentes par des simulations numériques. Attention, pour les équations d'ordre 1, même s'il n'y a qu'un coefficient a_0 à fournir à `solve_DE()`, il faut écrire `[a_0]`.

Question 14. En procédant par tâtonnement à partir de la fonction `solve_DE()`, trouver une équation différentielle d'ordre trois pour laquelle 0 est stable.

4 Le critère de Routh-Hurwitz

Question 15. Montrer qu'une fonction de la forme $y : t \mapsto e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ est solution de (3) si, et seulement si, $P(\lambda) = 0$, où P est le symbole de l'équation.

Comme précédemment, on cherche donc à caractériser P par ses racines éventuelles. On pourra utiliser le résultat suivant :

Théorème 1. Soit P un polynôme de degré n . Alors il existe $r < n$, des nombres réels (pas forcément distincts) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2d}, a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d$, tels que

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_{n-2d})(X^2 + a_1X + b_1)(X^2 + a_2X + b_2) \cdots (X^2 + a_dX + b_d),$$

où chaque trinôme $X^2 + a_jX + b_j$, pour $1 \leq j \leq d$, a un discriminant strictement négatif.

Si les facteurs dans ce produit sont tous distincts, on dit que le polynôme est à *racines simples*.

Question 16. Soit P le symbole de l'équation (3). On suppose que P est à racines simples, et on écrit

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_{n-2d})(X^2 + a_1X + b_1)(X^2 + a_2X + b_2) \cdots (X^2 + a_dX + b_d).$$

Montrer que toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_{n-2d} e^{\lambda_{n-2d} t} + C_{n-2d+1} e^{r_1 t} \cos(\omega_1 t) + C_{n-2d+2} e^{r_2 t} \cos(\omega_2 t) + \dots$$

sont solutions de (3), où les r_j, ω_j sont déterminés par les a_j, b_j .

On peut démontrer (mais on ne cherchera pas à le faire ici) qu'il existe un unique choix de coefficients, parmi les fonctions de la forme précédente, qui vérifie les conditions initiales.

Question 17. Montrer que le système est stable si, et seulement si, les systèmes associés à tous les facteurs de P , dans le Théorème 1, sont stables.

De manière générale (si $n \geq 5$), il n'existe pas de formule pour déterminer la factorisation de P . Il existe néanmoins un critère, dû à Routh et Hurwitz, et qui permet de déterminer si c'est le cas.

La méthode est la suivante : on écrit d'abord les coefficients du polynôme P sur deux lignes, en commençant par le terme de plus haut degré et en écrivant alternativement sur la ligne du haut et du bas. Si n est impair, cela donne

1	a_{n-2}	...	a_1
a_{n-1}	a_{n-3}	...	a_0

et si n est pair,

1	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_0
a_{n-1}	a_{n-3}	$\dots$	a_1	

Sur la troisième ligne, on écrit les produits en croix des coefficients au-dessus et à droite, par rapport à ceux de la première colonne :

1	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\dots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\dots$
$a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}$	$a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}$	$a_{n-1}a_{n-6} - a_{n-7}$	$a_{n-1}a_{n-8} - a_{n-9}$	$\dots$

À la fin du tableau, les cases vides correspondent à des 0 dans ce calcul.

On complète les lignes suivantes selon le même principe, à partir des deux dernières qui ont été écrites, et ce, jusqu'à ce que toute une ligne soit nulle.

Pour le polynôme $X^4 + 3X^3 + 7X^2 - 5X + 2$, cette méthode donne

1	7	2
3	-5	
26	6	
-148		
888		

Grâce à ce tableau, on peut déterminer si le système est stable : c'est vrai si, et seulement si, tous les coefficients de la première colonne de ce tableau sont strictement positifs.

Question 18. Démontrer que le critère de Routh-Hurwitz fonctionne pour les systèmes du second ordre.

Question 19. L'équation que vous avez proposée dans la question 14 est-elle stable d'après ce critère ?

Proposer d'autres équations stables de degré supérieur (on vérifiera la stabilité numériquement et algorithmiquement).