

Correction DM 3.

③ Par la Q8 :

$$q_n = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} + (1 - p_{12} - p_{21})^n \left(P(X_0=1) - \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \right).$$

Notons $q_n^{(1)}$ et $q_n^{(2)}$ les suites obtenues respectivement pour $P(X_0=1) = 1$, $P(X_0=1) = 0$ (ie. $P(X_0=2)=1$).

Alors : $|q_n^{(1)} - q_n^{(2)}| = |r|^n$ avec $r = 1 - p_{12} - p_{21}$.

On résout $|r|^n \leq 10^{-k}$ soit $n \geq \frac{k \log 10}{\log |r|}$.

Si $n \geq n_0$, alors on ne peut pas savoir d'où on est parti.

① et ⑬

Chaînes	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Publi	✓	x	x	x	x	✓
Irred.	x	x	x	x	✓	✓
Apériodiques.	✓	x	✓	✓	x	✓

Rq: Pour l'apériodicité, ne pas prendre en compte les sites qui n'admettent pas de période.

⑭ Par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n=1$, évident.

Supposons la propriété vraie au rang n . Soit

$$i \rightarrow (k_1) \rightarrow (k_2) \rightarrow \dots \rightarrow (k_n) \rightarrow j$$

un chemin de longueur $n+1$ reliant i à j . Alors :

$$\begin{aligned} p_{i \rightarrow j}^{(n+1)} &= P(X_{n+1}=j \mid X_0=i) \\ &= \sum_{l=1}^N P(X_{n+1}=j \text{ et } X_n=l \mid X_0=i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^N P_{l \rightarrow j} P(X_n = l \mid X_0 = i)$$

$$\geq \underbrace{P_{k_n \rightarrow j}}_{>0} \underbrace{P(X_n = k_n \mid X_0 = i)}_{>0 \text{ par hypothèse de récurrence - (il existe un chemin de } i \text{ à } k_n \text{ de longueur } n)} > 0,$$

Ce qui conclut la preuve -

14) Soit i fixé, $P_i = \{a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots\} \subset \mathbb{N}$
d'ensemble des périodes. Ilq il existe un sous-ensemble fini $a_1, \dots, a_n$ de P_i de $\text{PGCD} = 1$.

Posons $b_n := \text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Par construction, c'est une suite d'entiers décroissante minorée par 1 donc elle stationne i.e. $b_n = b_{n_0} \forall n \geq n_0$ pour un certain n_0 . Or, par hypothèse, $\text{PGCD}(P_i) = 1$ donc $b_n = b_{n_0} = 1$, c'est-à-dire $\text{PGCD}(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}) = 1$.

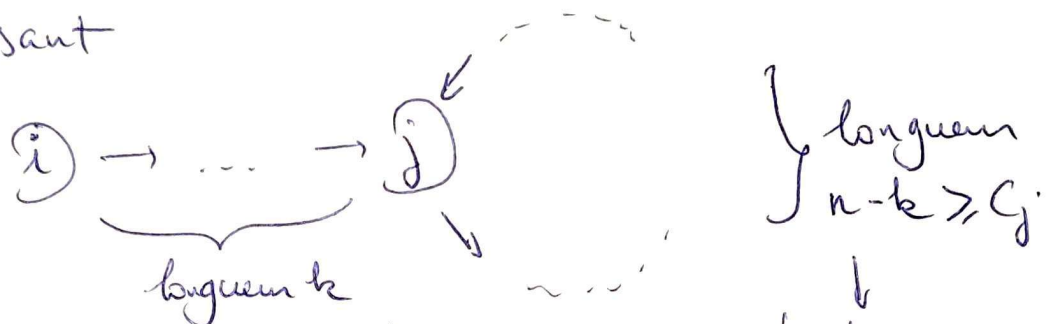
On applique alors le théorème: il existe $C_i > 0$ tel que pour tout $m \geq C_i$, on peut écrire

$$m = \underbrace{j_1}_{\geq 0} a_1 + \dots + \underbrace{j_{n_0}}_{\geq 0} a_{n_0}.$$

Si on note I_j le chemin associé, de période a_j , alors $\underbrace{I_1 \dots I_1}_{j_1 \text{ fois}} \underbrace{I_2 \dots I_2}_{j_2 \text{ fois}} \dots \underbrace{I_{n_0} \dots I_{n_0}}_{j_{n_0} \text{ fois}}$ est un

chemin de longueur m basé en i donc m est une période i.e. $m \in P_i$.

15) fixons i et j et montrons qu'il existe N_{ij} tq pour tout $n \geq N_{ij}$, $P_{i \rightarrow j}^{(n)} > 0$. Par hypothèse, il existe un chemin de longueur $k_{ij} \geq 0$ reliant i à j . Soit $C_j > 0$ tq $\forall n \geq C_j$, $n \in P_j$ (Q14). Alors pour tout $n \geq C_j + k_{ij}$, $P_{i \rightarrow j}^{(n)} > 0$. En effet, il existe un chemin de longueur n reliant i à j et obtenu en faisant



On prend enfin $n \geq N := \max_{i,j} N_{ij}$.

c'est donc une période de j .

11) 1. $\Rightarrow$ Supposons $(p_1, \dots, p_N)$ probabilités stables. Alors : a) Par hypothèse, ce sont des probabilités donc

$$p_i \in [0, 1].$$

$$b) \sum_{i=1}^N P(X_n = i) = p_i = 1.$$

$$c) \underbrace{P(X_{n+1} = i)}_{p_i} = \sum_{j=1}^N \underbrace{P(X_{n+1} = i | X_n = j)}_{p_{j \rightarrow i}} \underbrace{P(X_n = j)}_{p_j}$$

$$\text{Soit } p_i = \sum_{j=1}^N p_{j \rightarrow i} p_j.$$

$\Leftarrow$ immédiat.

2. Comme $\sum_{i=1}^N \underbrace{p_i}_{\geq 0} = 1$, il existe un $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ tel que $p_{i_0} > 0$. Alors :

$$P_i = \sum_{j=1}^N P_j P_{j \rightarrow i} \geq \underbrace{P_{i_0}}_{>0} \underbrace{P_{i_0 \rightarrow i}}_{>0, \text{ par hypothèse}} > 0.$$

3. Notons $s_i = t p_i + (1-t) q_i$. Alors :

$$\sum_{i=1}^N s_i = t \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i}_{=1} + (1-t) \underbrace{\sum_{i=1}^N q_i}_{=1} = t + 1-t = 1.$$

$$\sum_{j=1}^N s_j P_{j \rightarrow i} = t \underbrace{\sum_{j=1}^N P_j P_{j \rightarrow i}}_{=P_i} + (1-t) \underbrace{\sum_{j=1}^N q_j P_{j \rightarrow i}}_{=q_i}$$

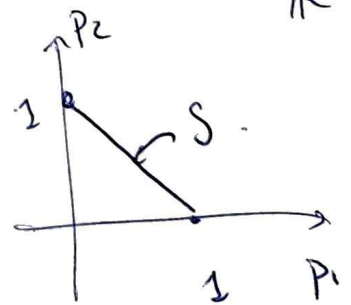
$$= t p_i + (1-t) q_i = s_i.$$

4. On propose une solution géométrique. Notons S le simplex défini par :

$$S := \left\{ (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N : \begin{array}{l} p_i \in [0, 1] \forall i \\ \sum_{i=1}^N p_i = 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^N.$$

La droite $D = \{ t p + (1-t) q : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^N$

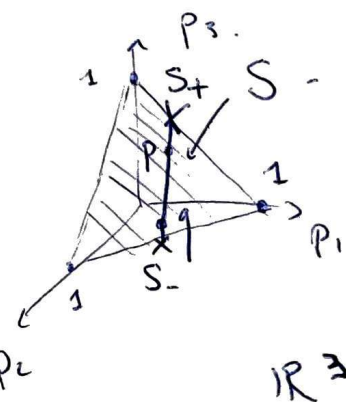
$N=2$



(c'est une vraie droite car $p \neq q$)

intercepte le bord du simplex en deux points S_- et S_+ qui vérifient les propriétés demandées.

$N=3$



5. Les points S_- et S_+ contredisent (b2),
Donc $p = q$.