Espaces des phases à deux paramètres
Récapitulatif

1 Cadre

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à un objet ponctuel se déplaçant sur une droite et soumis à une force F ne dépendant que de la position, est une **équation différentielle du second ordre** :

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)).$$

Pour étudier le problème, il est utile d'introduire explicitement la vitesse, et de transformer cette équation en un **système différentiel du premier ordre** :

$$\dot{x}(t) = v(t) \tag{1}$$
$$\dot{v}(t) = F(x(t)). \tag{2}$$

En effet, la connaissance de x et de v à un moment donné (condition initiale) détermine toute l'évolution future du système. On représente l'état du système à chaque instant dans le **plan de phase** qui est le plan des valeurs possibles de x et v. L'évolution du système possède alors souvent une interprétation géométrique agréable.

1.1 Exemple : l'oscillateur harmonique (Exo 3)

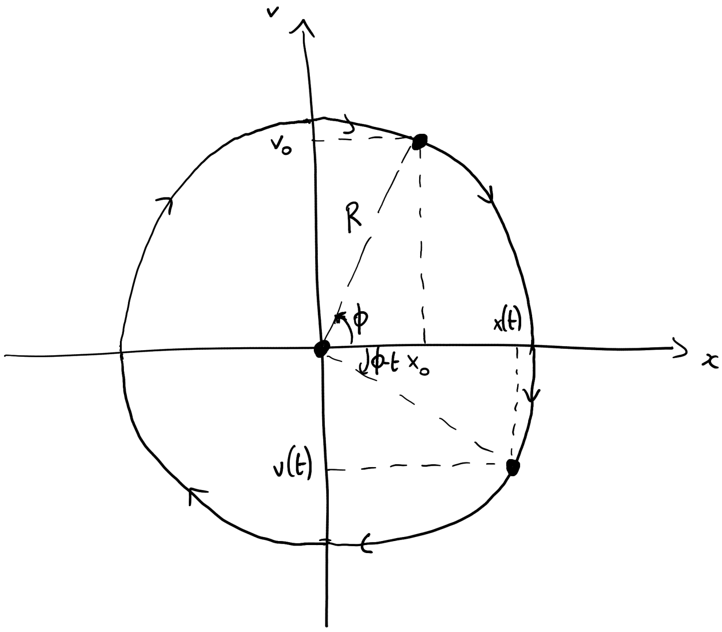
On considère le cas d'une force de rappel $F(x) = -x$ correspondant à la loi de Hooke. Le système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -x(t). \end{aligned}$$

La solution de ce système est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= R\cos(-t+\phi) \\ \dot{v}(t) &= R\sin(-t+\phi), \end{aligned}$$

où $(r, -\phi)$ sont les coordonnées polaires de $(x(0), v(0))$. Autrement dit, dans l'espace des phases, l'évolution du système est la suivante : le point $(x(t), v(t))$ reste toujours sur un même cercle centré en 0 (de centre r), et tourne autour de 0 dans le sens des aiguilles d'une montre.



On peut vérifier à la main que la solution convient ; on verra dans le DM2 une méthode générale de résolution des équations différentielles **linéaires**.

1.2 Exemple : le pendule simple (séance 1)

Le système différentiel pour le pendule simple s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -\sin(x(t)). \end{aligned}$$

Malheureusement, on ne peut pas exprimer les solutions de cette équation à l'aide des fonctions élémentaires (polynômes, racines, exp, sin, cos, ln, ...). L'étude des solutions de cette équation commence par la mise en évidence de **quantités conservées**, en l'occurence l'énergie mécanique totale. L'énergie cinétique dans ce problème est

$$K(t) = \frac{1}{2}v(t)^2$$

et l'énergie potentielle est

$$V(t) = -\cos(x(t)).$$

On peut démontrer (cf Section 2) que l'énergie totale est conservée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K(t) + V(t)) = 0.$$

Ce sera le cas en général pour des systèmes de la forme (1), où on choisit V comme une primitive de $-F$.

L'évolution du système dans le plan de phase est donc **contrainte** sur des courbes $\{\frac{1}{2}v^2 - \cos(x) = C\}$. On peut dessiner ces courbes d'une manière ou d'une autre (on verra en Section 3 comment les dessiner), et déterminer complètement l'évolution du système (cf Section 3.3). On trouve que **presque toutes les trajectoires sont périodiques**, sauf celles qui **tendent vers un point d'équilibre instable** (et qui ne se produisent jamais physiquement).

2 Calcul différentiel et quantités conservées

Le but de cette section est de familiariser avec la notion de dérivée quand il y a plusieurs quantités qui évoluent en même temps. On parle notamment de la formule des dérivées totales et on montre comment s'en servir.

2.1 La formule des dérivées totales (Exo 1)

On connaît bien la formule de la dérivée d'une composée. Si une quantité f est une fonction de x, qui elle-même dépend de t, alors la variation de f par rapport au temps peut s'écrire de ces trois manières suivantes :

$$\dot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = (f \circ x)'(t).$$

La formule donne alors

$$\dot{f}(t) = f'(x(t))\dot{x}(t).$$

Le premier terme à droite, $f'(x(t))$, est bien la dérivée de y **par rapport à** x, évaluée en $x(t)$. Avec la convention « fraction », cela s'écrit encore

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Il ne faut pas toujours ce fier à la forme « fractionnaire » de cette notation, comme illustré par la formule des dérivées totales plus bas.

Imaginons maintenant une expression H où interviennent deux quantités $x(t)$ et $y(t)$, par exemple l'énergie totale $H(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}y(t)^2 + V(x(t))$ où y est la vitesse. Pour étudier comment cette expression varie en fonction du temps, il faut introduire les **dérivées partielles**

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \text{dérivée de } H \text{ par rapport à } x \text{ avec } y \text{ fixée}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \text{dérivée de } H \text{ par rapport à } y \text{ avec } x \text{ fixée.}$$

Dans l'exemple précédent on a

$$\frac{\partial H}{\partial x} = V'(x(t)) \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial y} = y(t).$$

La formule des dérivées totales est alors

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Intuitivement, si H dépend de deux quantités x et y, pour savoir comment H change avec le temps, il faut **sommer** la manière dont H bouge à cause de x et la manière dont H bouge à cause de y. L'exemple $H = \frac{1}{2}y(t)^2 + V(x(t))$ donne

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = y(t)\dot{y}(t) + V'(x(t))\dot{x}(t).$$

Ici, il faut prendre garde à ne pas simplifier les fractions ! D'ailleurs, on a fait la différence entre la notation $\mathrm{d}x$ et ∂x.

2.2 Comment montrer qu'une quantité est conservée (Exo 2)

Une quantité est conservée quand sa dérivée par rapport au temps est nulle.

Pour une quantité dépendant de x et v, on peut appliquer la formule des dérivées totales (3) et remplacer $\dot{x}(t)$ et $\dot{v}(t)$ par leurs valeurs.

Avec $H(x(t), v(t)) = \frac{1}{2}v(t)^2 + V(x(t))$, on a déjà vu que

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = v(t)v\dot{(}t) + V'(x(t))\dot{x}(t).$$

En remplaçant $v\dot{(}t)$ et $x\dot{(}t)$ grâce à l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = v(t)[F(x(t)) + V'(x(t))].$$

Ainsi, si le potentiel V est une primitive de $-F$, le terme entre crochets est nul et on a bien

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

3 Dessine-moi un portrait de phase

3.1 Points d'équilibre stables et instables

L'analyse de l'équation différentielle ... commence par la recherche des **points d'équilibre** : les configurations où le système est immobile. Autrement dit, il s'agit des points où la force est nulle, donc les points où la dérivée du potentiel est nulle. Typiquement, ces points sont de deux sortes : ceux qui sont en bas d'une cuvette, et ceux qui sont en haut d'une montagne. Le système se comporte très différemment près de ces points, et le dessin du portrait de phase va mettre cette différence en évidence.

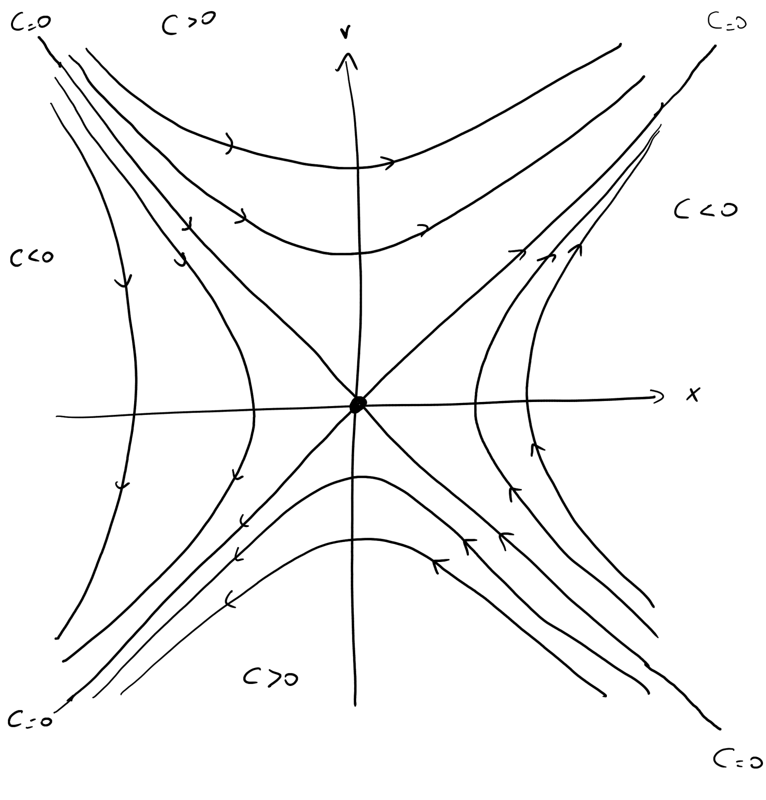
On a déjà remarqué plus haut (Section 1.1) que si $V(x) = \frac{x^2}{2}$ (primitive de $-F(x) = x$) alors le mouvement est contraint à des cercles de rayon 0. On vérifie que les ensembles $\{\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C\}$ sont tous des cercles de rayon $\sqrt{2C}$.

Si le potentiel présente une « cuvette » à un endroit, avec un minimum local en un point x_0, alors les courbes d'énergie constante, près de $x = x_0$ et $v = 0$, vont être des ronds concentriques autour de ce point.

En particulier, si on choisit un point initial proche de $x = x_0, v = 0$, il va rester sur un petit rond, et ne jamais s'éloigner de ce point ; l'équilibre est **stable**.

On peut aussi dessiner complètement les courbes dans le cas $V(x) = -\frac{x^2}{2}$ d'un « sommet » du potentiel. Les courbes $\{\frac{v^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C\}$ sont de trois types.

1. Cas $C = 0$ (séparatrice) : on a $v^2 = x^2$ donc $v = \pm x$ (attention au signe!). Les courbes sont les deux droites de pente 1 et -1, qui se croisent en 0.
2. Cas $C > 0$: on a $v^2 = 2C + x^2$ donc $v = \pm\sqrt{2C + x^2}$ est, à un signe près, une fonction de x bien définie ($2C + x^2$ est toujours positive). Le graphe de ces fonctions est une **branche d'hyperbole**.
3. Cas $C < 0$: cette fois-ci on écrit $x^2 = -2C + v^2$ et donc $x = \pm\sqrt{-2C + v^2}$ est encore, à un signe près, une fonction de v bien définie car $-2C + v^2$ est toujours positive. Le graphe de ces fonctions est une autre branche d'hyperbole, mais tournée d'un quart de tour par rapport à $C > 0$.



Le point d'équilibre $x = 0, v = 0$ est **instable** : certes, certaines trajectoires pour $C = 0$ tendent vers ce point d'équilibre, mais les trajectoires voisines sont repoussées.

3.2 Dessiner les courbes d'énergie

On se donne un profil de potentiel pour lequel on souhaite dessiner les coubres d'énergies dans le plan (x, v) (étape 1).

On commence par marquer les puits et les sommets de V ; ces valeurs de x vont toutes correspondre à des points d'équilibre avec $v = 0$. Ceux dans les puits sont stables, ceux sur les sommets sont instables.

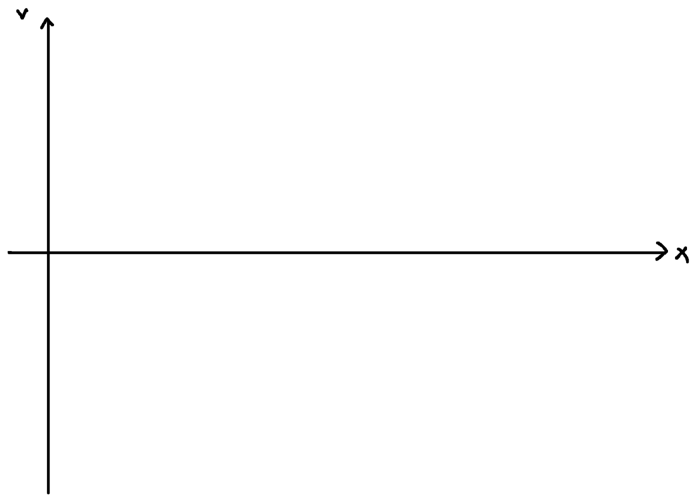
Les points bleus correspondent à des points stables, on dessine des petites trajectoires circulaires autour. Pour les points rouges, on dessine le début des séparatrices (C=0).

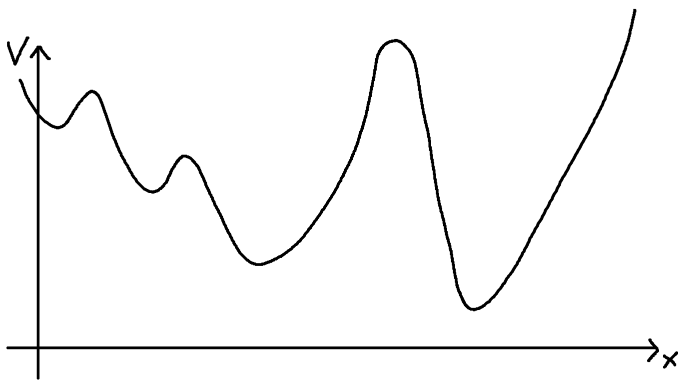
On complète le dessin des séparatrices en commençant par celle correspondant à la plus petite valeur de V. On détermine sa zone d'influence (intervalle en espace que peut visiter une particule dans une configuration initiale très proche). On dessine ensuite un 8 couché dont les sommets correspondent aux bornes de la zone d'influence.

On fait de même pour les autres séparatrices. Les courbes sont imbriquées les unes dans les autres, elles ne doivent pas se croiser.

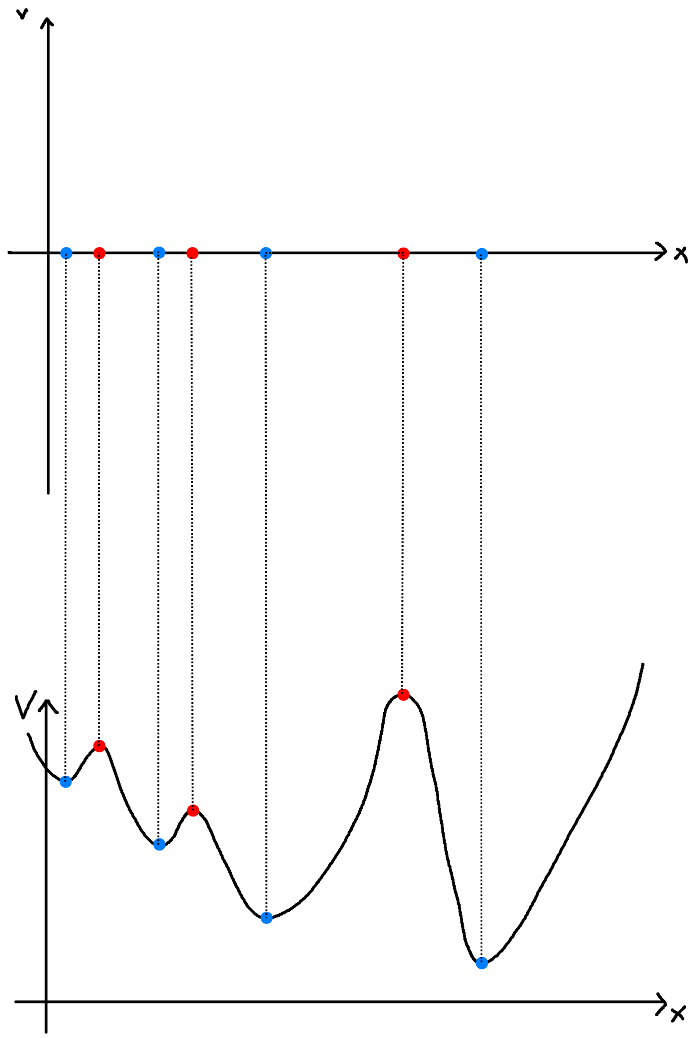
Pour finir on dessine quelques courbes régulières (à des valeurs d'énergie qui ne correspondent pas à des séparatrices). Encore une fois les courbes ne se croisent pas.

Etape 1 :

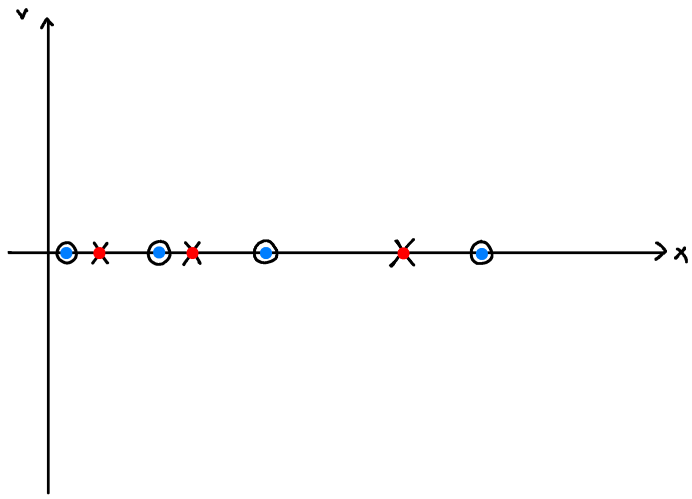


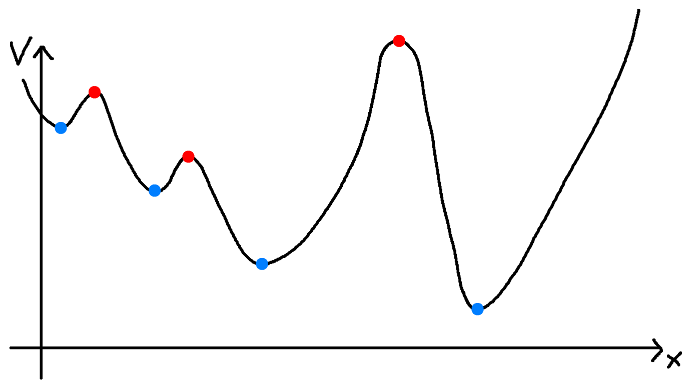


Etape 2 :

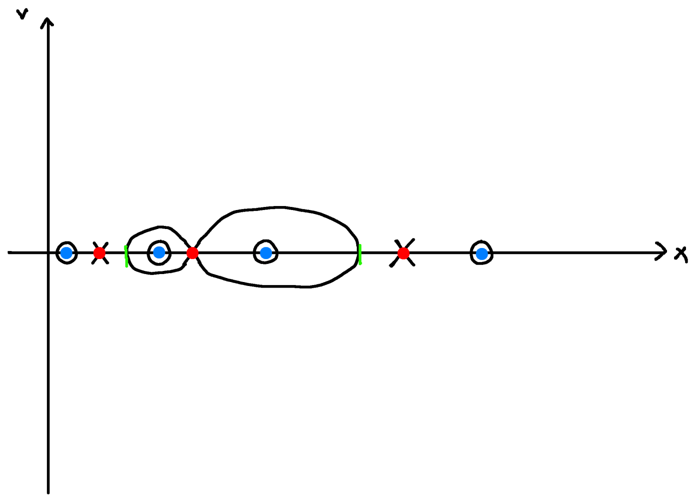


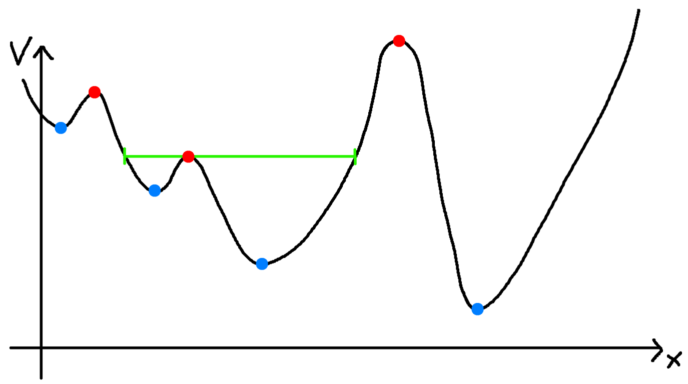
Etape 3 :



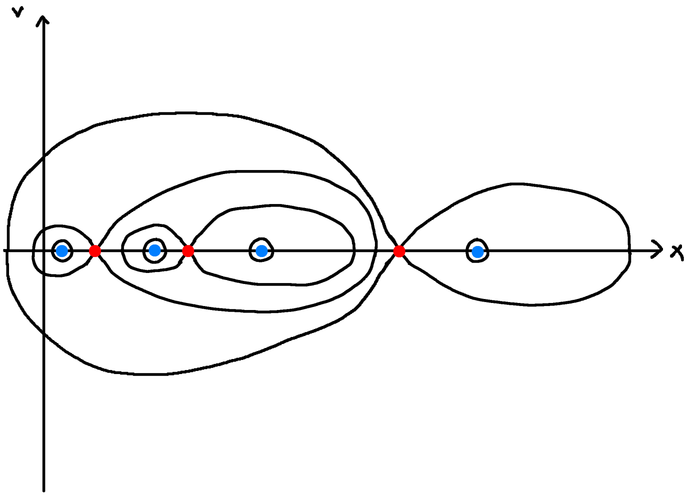


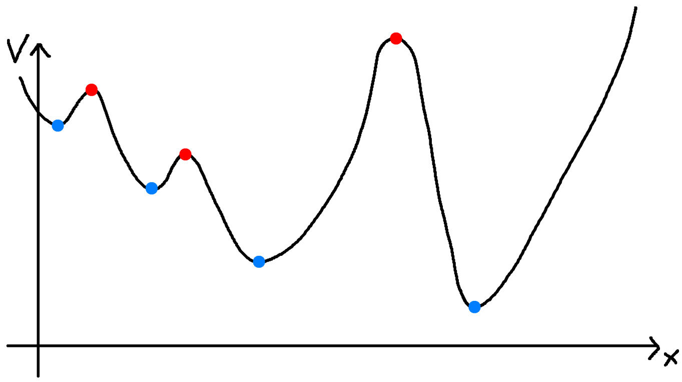
Etape 4 :



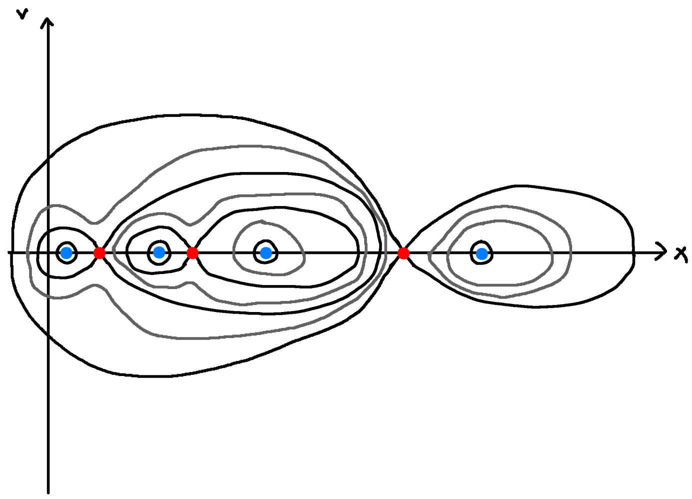


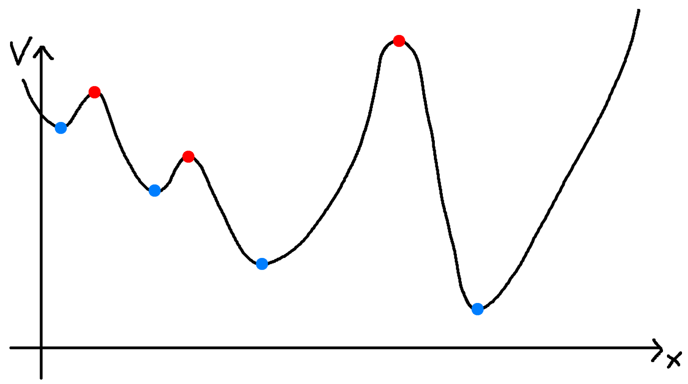
Etape 5 :





Etape 6 :





3.3 Description complète de la dynamique

On a vu en faisant le dessin que l'espace des phases contient un nombre fini de séparatrices associées à des points d'équilibre instables; les autres courbes d'énergie sont soit des courbes régulières (sans point de croisement) soit des points d'équilibre stables. Puisque la trajectoire reste sur chaque courbe, on en déduit que pour presque toutes les conditions initiales, le mouvement est **périodique**. Si la configuration initiale est exactement sur une séparatrice, alors l'état du système converge vers un point d'équilibre instable.

4 Exercices complémentaires

Exercice 1. Utiliser la formule des dérivées totales pour calculer les dérivées des quantitées suivantes par rapport au temps ; vérifier votre calcul en remplaçant directement $x(t)$ et $y(t)$ par leurs expressions avant de dériver.

$$\cos(x(t)) - e^{y(t)} \qquad x(t) = \ln(t) \qquad y(t) = \sin(t).$$

$$x(t)y(t) \qquad x(t) = \cos(t) \qquad y(t) = t^2.$$

$$e^{x(t)y(t)} \qquad x(t) = t^2 \qquad y(t) = \frac{1}{t}.$$

Exercice 2. (Examen 2021) On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -R_0 i(t)s(t) \\ \dot{i}(t) &= R_0 i(t)s(t) - i(t). \end{aligned}$$

Montrer que la quantité

$$H(i(t), s(t)) = R_0(i(t) + s(t)) - \ln(s(t))$$

est conservée.